

LAHENDUSED 8. KLASS

Vastus: a) $x = 12$, b) arvpaare on 2021.

Lahendus:

$$\text{a) } (x * 3) = x - \frac{x}{3} = \frac{3x-x}{3} = \frac{2x}{3}$$

$$\frac{2x}{3} * 6 = \frac{2x}{3} - \frac{2x}{6} = \frac{2x}{3} - \frac{2x}{18} = \frac{12x - 2x}{18} = \frac{10x}{18} = \frac{5x}{9}$$

Et $\frac{5x}{9} = \frac{20}{3}$, siis $15x = 180$, millest $x = 12$.

$$\text{b) Et } y * z = 0 \text{ ja } y * z = y - \frac{y}{z}, \text{ siis } y - \frac{y}{z} = y \left(1 - \frac{1}{z}\right) = 0.$$

Korrutis on 0, kui üks teguritest on 0. Kuna y on suurem kui 0, siis $1 - \frac{1}{z} = 0$, mis on õige, kui $z = 1$. Seejuures y võib omandada ükskõik millise lubatud väärtuse.

Et y on täisarv ja $0 < y < 2022$, siis y saab olla 2021 erinevat väärtust.

Hindamine:

a) Leitud $(x * 3)$: 1p

Leitud $(x * 3) * 6$: 2p

Leitud x : 1p

b) Teisendatud korrutiseks: 1p

Näidatud, et z peab olema 1: 1p

Ainult õige vastus: 1p

7p

2. Vastus: Asendamine ei ole võimalik.

Lahendus:

Lahendus 1:

Vaadates liidetavate ja summa ühelisi, näeme, et tähele E peab vastama 0.

Kasutades arvude esitust kümnendsüsteemis ja et $E = 0$, saame võrduse kirjutada kujul

$$1000 \cdot M + 100 \cdot A + 10 \cdot T + 100 \cdot M + 10 \cdot A + A = 1000 \cdot T + 100 \cdot I + 10 \cdot K + A$$

$$1100 \cdot M + 111 \cdot A + T = 1000 \cdot T + 100 \cdot I + 10 \cdot K + A$$

$$1100 \cdot M + 110 \cdot A = 999 \cdot T + 100 \cdot I + 10 \cdot K$$

Näeme, et võrduse vasak pool jagub arvuga 10. Võrduse parem pool saaks jaguda arvuga 10 vaid juhul, kui tähele T vastab number 0, mis aga ei ole võimalik, kuna eelnevalt juba teame, et E peab olema 0.

Lahendus 2:

Kirjutame tehte kirjaliku liitmisena. Vaadates arvude ühelisi, näeme, et $E + A = A$, millest saame, et $E = 0$.

Summas on T tuhandelist ja ühes liidetavas on M tuhandelist. Seega peab tähele T vastav number olema ühe võrra suurem tähele M vastavast numbrist. Vaadates liidetavate sajalisi, näeme, et $A + M$ peab olema suurem kui 10. Kuna T on suurem kui M, peab ka summa $T + A$ olema suurem kui 10. Näeme, et $T + A$ üheliste number peab olema K.

Samas peaks summa $A + M + 1$ üheliste number olema I. Et aga $M + 1 = T$, siis saame et $A + T$ üheliste number peaks olema I. Oleme saanud vastuolu ja seega selline tähtede asendamine numbritega ei ole võimalik.

$$\begin{array}{r} \text{MATE} \\ + \text{MAA} \\ \hline \text{TIKA} \end{array}$$

Hindamine:

Lahendus 1:

Leitud, et $E = 0$:

1p

Arvud välja kirjutatud kasutades nende esitust järguühikute kordsete summana:

3p

Teisendatud kujule, mille põhjal saab näidata vastuolu:

1p

Näidatud vastuolu:

2p

7p

Lahendus 2:

Leitud, et $E = 0$:

1p

Tähelepanek, et T peab olema 1 võrra suurem kui M:

2p

Märgatud, et $A + M$ peab olema suurem kui 10:

1p

Näidatud vastuolu, et $A + T$ üheliste number peaks olema nii K kui ka I:

3p

7p

Märkus: Antud ainult vastus, et see ei ole võimalik: 1p

3. Vastus: Volli sõi $\frac{2}{11}$ kausis olnud kommidest.

Lahendus:

Olgu ühe lapse poolt ühe minuti jooksul kausist söödud kommide arv x .

Seega Volli sõi $10x$ kommi, Kalle $9x$ kommi jne kuni kümnes laps sõi x kommi.

Kokku söödi selle aja jooksul

$$10x + 9x + 8x + 7x + 6x + 5x + 4x + 3x + 2x + x = 55x \text{ kommi.}$$

Järelikult Volli sõi $10x$ kommi $55x$ -st kommist, mis on $\frac{10x}{55x} = \frac{2}{11}$.

Hindamine:

Võetud kasutusele sobiv tähistus ja kirja pandud mitu kommi iga laps sõi: 2p

Avaldatud kausis olnud kommide arv: 2p

Leitud kui suure osa moodustasid Volli poolt söödud kommid: 3p

7p

Märkus: Antud ainult õige vastus: 2p

4. Vastus. Nurk AFH on 165° .

Lahendus:

Lahendus 1:

Nelinurga $AFHK$ sisenurkade summa on 360° . Kuna ruutude lähisküljed on risti ja vastasküljed on paralleelsed, siis saame, et sirged AF ja KJ on paralleelsed.

Nende kahe paralleelse sirge lõikamisest kolmandaga (AC) saame, et nurgad CKJ ja CAF on võrdsed.

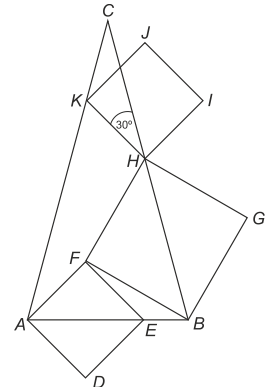
Olgu nurga CAF suurus α . Sel juhul sirgurgast AKC saame nurga AKH suuruseks $180^\circ - \alpha - 90^\circ = 90^\circ - \alpha$.

Nurga KHF suurus on $180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.

Nelinurgast $AFHK$ saame, et

$$360^\circ = \angle KAF + \angle AFH + \angle FHK + \angle HKA = \alpha + \angle AFH + 105^\circ + 90^\circ - \alpha.$$

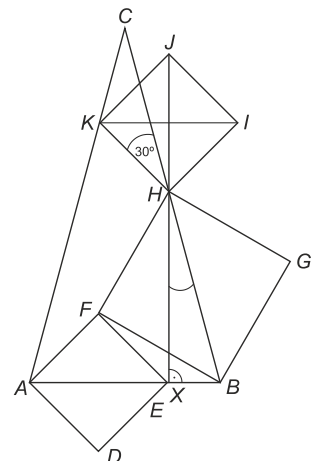
Millest $360^\circ = \angle AFH + 195^\circ$. Järelikult $\angle AFH = 165^\circ$.



Lahendus 2:

Nurga AFH suuruse saame leida, kui täispöördselt lahutame ruutude nurkade AFE ja HFB suurused ning nurga EFB suuruse. Kuna ruutude $ADEF$ ja $KHIJ$ küljed on paralleelsed, siis diagonaal KI on paralleelne lõiguga AB . Ruudu diagonaalid on risti ja seega diagonali JH pikendus lõikub AB -ga täisnurga all punktis X (pole hetkel oluline, kas langeb kokku punktiga E või mitte). Tekib täisnurkne kolmnurk HXB . Nurk XHB on tippnurk nurgaga CHJ , mille suurus on $\angle JHK - \angle CHK = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$. Täisnurksest kolmnurgasr HXB saame nüüd sisenurkade summa põhjal, et nurga HBA suurus on $180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$. Kuna nurga HBF suurus on 45° , siis nurga FBA suuruseks on $\angle HBA - \angle HBF = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$. Vaatame kolmnurka FEB . Nurk FEB on nurga FEA kõrvunurk ja seega suurusega $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Nurk EFB on kolmnurkade sisenurkade summa põhjal suurusega $180^\circ - 135^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Nurga AFH suurus on $360^\circ - 90^\circ - 15^\circ - 90^\circ = 165^\circ$.



Lahendus 3:

Nurga AFH suuruse saame leida kui täispöördest lahutame ruutude nurkade AFE ja HFB suurused ning nurga EFB suuruse. Et kolmnurk ABC on võrdhaarne ja nurgad FAE ja FBH on mõlemad pool ruudu nurgast, siis peavad nurgad CAF ja ABF olema võrdsed.

Kuna ruutude $ADEF$ ja $KHIJ$ küljed on paralleelsed, siis KJ ja AF on paralleelsed ja ja neid mõlemaid on lõigatud sirgega AC , siis nurgad CAF ja CKJ on võrdsed.

Oleme saanud, et $\angle ABF = \angle CAF = \angle CKJ = \alpha$

Olgu punkt P külgede CB ja KJ lõikepunkt. Kolmnurgast KHP saame sisenurkade summa põhjal, et $\angle KPH = 180^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Kuna nurk KPC on nurga KPH kõrvunurk, siis $\angle KPC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Kolmnurgast CKP saame, et $\alpha + 120^\circ + \angle PCK = 180^\circ$.

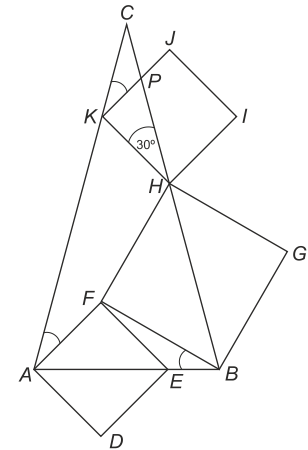
Kolmnurgast ABC saame, et $\alpha + 45^\circ + \alpha + 45^\circ + \angle BCA = 180^\circ$.

Arvestades, et $\angle BCA = \angle PCK$, saame kirjutada

$\alpha + 120^\circ + \angle PCK = \alpha + 45^\circ + \alpha + 45^\circ + \angle PCK$, millest $\alpha + 120^\circ = 2\alpha + 90^\circ$ ja seega $\alpha = 30^\circ$.

Vaatame kolmnurka FEB . Nurk FEB on nurga FEA kõrvunurk ja seega suurusega $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Nurk EFB on kolmnurkade sisenurkade summa põhjal suurusega $180^\circ - 135^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Nurga AFH suurus on $360^\circ - 90^\circ - 15^\circ - 90^\circ = 165^\circ$.



Lahendus 4:

Nurga AFH suuruse saame leida kui täispöördest lahutame ruutude nurgade AFE ja HFB suurused ning nurga EFB suuruse. Pikendame ruutude $ADEF$ ja $KHIJ$ külgi FE ja KH . Pikendame lõiku CB üle otspunkti B ja olgu CB pikenduse ja FE pikenduse lõikepunkt R .

Et ruutude $ADEF$ ja $KHIJ$ küljed on paralleelsed, siis paralleelsete sirgete KH ja FE lõikamisel sirgega CB tekivad võrdsed kaasnurgad.

Seega $\angle CHK = \angle HRF = 30^\circ$.

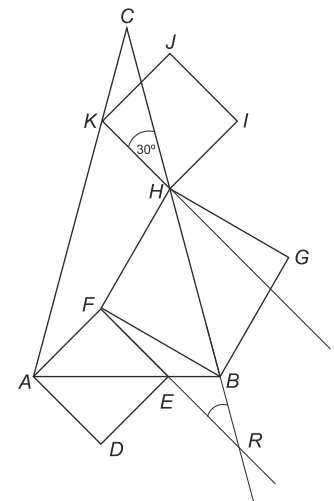
Nurk BER on nurga FEA tippnurk ja seega suurusega 45° . Kolmnurgast ERB saame sisenurkade summa põhjal, et EBR on suurusega $180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$.

Et CBE on nurga EBR kõrvunurk, siis $CBE = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

Kuna nurk FBH on suurusega 45° , siis nurk FBE on suurusega $75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$.

Vaatame kolmnurka FEB . Nurk FEB on nurga FEA kõrvunurk ja seega suurusega $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Nurk EFB on kolmnurkade sisenurkade summa põhjal suurusega $180^\circ - 135^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Nurga AFH suurus on $360^\circ - 90^\circ - 15^\circ - 90^\circ = 165^\circ$.



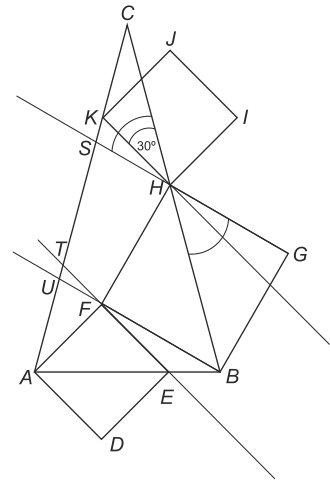
Lahendus 5:

Nurga AFH suuruse saame leida kui täispöördselt lahutame ruutude nurgade AFE ja HFB suurused ning nurga EFB suuruse. Pikendame lõike KH , HG , FE ja FB . Olgu sirge HG ja lõigu AC lõikepunkt S , sirge FE ja lõigu AC lõikepunkt T ning sirge FB ja lõigu AC lõikepunkt U .

Tekib kaks paari paralleelseid sirgeid. Seetõttu nurgad KHS ja TFU on võrdsed.

Nurk SHC on suurusega 45° , sest on nurga BHG tippnurk. Nurga SHK suurus on $\angle SHC - \angle KHC = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$. Seega ka nurk UFT on suurusega 15° . Kuna nurk EFB on nurga UFT tippnurk, siis ka selle suurus on 15° .

Nurga AFH suurus on $360^\circ - 90^\circ - 15^\circ - 90^\circ = 165^\circ$.



Hindamine:

Lahendus 1:

Näidatud, et nurgad CAF ja CKJ on võrdsed:

2p

Avaldatud nurga AKH suurus:

1p

Leitud nurga KHF suurus:

2p

Nelinurga sisenurkade summat kasutades leitud nurga AFH suurus:

2p

7p

Lahendused 2-5:

Täiendatud joonist sobivate konstruktsioonidega:

1p

Märgatud sirgete/lõikude paralleelsust:

1p

Leiab paralleelsuset tulenevalt võrdseid nurki:

1p

Leiab nurkade suurusi kasutades kolmnurga/nelinurga sisenurkade summat:

2p

Leitud nurga EFB suurus:

1p

Leitud nurga AFH suurus:

1p

7p

Märkus: Antud vaid õige vastus 1 p.

5. Vastus: Võimalused on: AAAAAAAAAAAAAA, ABAAAAAAAAAAAA, AABAAAAAAAAA, AAABAAAA, AAAABA, ABABA, ABBAAAA.

Lahendus:

Kuna alguses on ekraanil arv 0, siis esimesena ei saa vajutada klahvi B, sest sel juhul ei muutuks ekraanil olev arv. Samuti, kuna ekraanil on lõpuks arv 13, mis ei ole arvu 3 kordne, peab ka viimane vajutus olema klahvile A. Seega vaid klahvi B vajutades ei ole võimalik ekraanile saada arvu 13.

On selge, et arvu 13 on võimalik saada kasutades vaid klahvi A. See on AAAAAAAAAAAAAA. Vaatame võimalusi, milles kasutatakse mõlemat klahvi.

Klahvi B vajutamine suurendab arvu 3 korda ja seega kindlasti ei saa vajutuste seas vajutada klahvi B rohkem kui kaks korda, sest juba vajutamiste järjekord ABBB annaks arvust 13 suurema tulemuse.

Pärast klahvi B vajutamist saab ekraanil olla kas arv 3, 6, 9 või 12.

Vaatame võimalusi kui klahvi B kasutada üks kord.

Võimalused on: ABAAAAAAAAAAAA, AABAAAAAAAAA, AAABAAAA, AAAABA.

Kui klahvi B vajutada kaks korda, siis enne teise B kasutamist saab ekraanil olla ülimalt arv 4, sest pärast teist klahvi B vajutamist saab suurimaks võimalikuks arvuks olla vaid 12.

Saame kaks võimalust, milledeks on: ABABA ja ABBAAAA.

Hindamine:

Tähelepanek, et kasutades vaid ühte liiki klahve on üks arvu 13 saamiseks üks võimalus: 1p

Tähelepanek, et klahvi B saab kasutada ülimalt 2 korda: 2p

Leitud kõik võimalused, kus üks kord on vajutatud klahvi B ja on näidatud/selgitatud, miks rohkem selliseid ei ole: 2p

Leitud kõik võimalused, kus on kaks korda vajutatud klahvi B: 2p

7p

Märkus: Kui vastuseks antud vaid kõik 7 võimalust, siis anda 2p

Kui variandid on süsteemselt välja tood ja on teatud kohtades näidatud, miks sama loogikaga edasi ei saa minna, lugeda lahendus täispunktide vääriliseks.